量子化された一次と高次のHamiltonianの可換性について(非線型可積分系の研究の現状と展望)

池田, 薫

数理解析研究所講究録
868巻 1994年 157-168

量子化された一次と高次のHamiltonianの可換性について

小樽商科大学　池田　薫 (Kaoru Ikeda)

§0 Intro.　次の戸田分子は古典力学の意味で完全積分可能

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 = 2e^{2(u_2-u_1)} \\ \ddot{u}_i = 2(e^{2(u_{i+1}-u_i)} - e^{2(u_i-u_{i-1})}) & 1<i<n \quad (0.1) \\ \ddot{u}_n = -2e^{2(u_n-u_{n-1})} \end{cases}$$

この事実を古典 r 行列の言葉を使って述べよう.

$$R = q\sum_{1\le i\le n} e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\ne j} e_{ii}\otimes e_{jj} + (q-q^{-1})\sum_{1\le j<i\le n} e_{ij}\otimes e_{ji}$$

但し e_{ij} は (i,j) 行列単位とする. 行列 X を $X=(x_{ij})_{n\times n}$ とする. 又 $X_1 = X\otimes 1$, $X_2 = 1\otimes X$ とする. $\hat{A}(GL_q(n))$ を x_{ij} $1\le i,j\le n$ で生成される自由結合代数とし $A(GL_q(n)) = \hat{A}(GL_q(n))/I_R$, 但し I_R は $RX_1X_2 - X_2X_1R$ の成分で生成される ideal, とする. x_{ij} 達がみたす関係式を具体的に書き下すと

$$[x_{ij}, x_{kl}] = x_{ij}x_{kl} - x_{kl}x_{ij} = (q^{\theta(j,l)} - q^{-\theta(i,k)})x_{il}x_{kj} \qquad (0.2)$$

但し $\theta(i,j) = 1$ $i<j$, $=0$ $i=j$, $=-1$ $i>j$ とする. $X=(x_{ij})_{n\times n}$ を $X\in GL_q(n)$ とかく. $q=e^{\hbar}$ とし R 及び X を $\hbar$ に関し展開する. $R = 1+\hbar r + O(\hbar^2)$, $X = y + O(\hbar)$ とおくと $RX_1X_2 - X_2X_1R = 0$ より $y_1y_2 - y_2y_1 = 0$

$y = (y_{ij})_{n\times n}$ とすると y_{ij} $1\le i,j\le n$ 達は可換な代数を生成する. それ

を $A(GL(n))$ とかく．$A(GL(n))$ には次の Poisson 構造が入る．

$$\{y \underset{,}{\otimes} y\} = [r, y \otimes y]$$

この Poisson 関係式を具体的に書き下すと

$$\{y_{ij}, y_{kl}\} = (\theta(j,l) + \theta(i,k))\, y_{il} y_{kj}$$

となる．さて $tr(y^m)$（以下 $tr\, y^m$ と略記）に関し次の公式がなりたつ．$\{tr\, y^m, y_{ij}\} = m\,[P_m(y), y]_{ij}$ ここで $P_m(y)_{ij} = (y^m)_{ij}$ $i<j$, $=0$ $i=j$, $=-(y^m)_{ij}$ $i>j$．この公式より $\{tr\, y^k, tr\, y^l\} = 0$ が成り立つ．$tr\, y^k$ $k=1,2,\cdots$ はこの Poisson 構造の上で互いに可換な Hamiltonian とみなせる．$A(GL(n))$ の生成元の個数を Phase space の自由度とみなすと $\det y = const$ とみなせるからその次元は n^2-1 次元となる．自由度 $2n$ の Phase space 上の n コの互いに Poisson bracket で可換な Hamiltonian があればその系は積分可能であるという Liouville の定理がある．$tr\, y^k$ のうち $k \geq n$ については $tr\, y, \dots, tr\, y^{n-1}$ の多項式で書き下せてしまうので本質的には Hamiltonian は $n-1$ 個しかない．Phase space の自由度をおさえて $2n-2$ 次元までおとす．$z_{ij} = ({}^t y y)_{ij}$ とすると $z_{ij} = z_{ji}$ で

$$\{z_{ij}, z_{kl}\} = (\theta(j,k) + \theta(i,l))\, z_{ik} z_{jl} + (\theta(j,l) + \theta(i,k))\, z_{il} z_{jk}$$

となる．さらに $\rho(z_{ij}) = 0$ if $|i-j|>1$, $\rho(z_{ij}) = z_{ij}$ if $|i-j| \leq 1$ としたとき $\{\rho(z_{ij}), \rho(z_{kl})\} = \rho\{z_{ij}, z_{kl}\}$ となる．$\rho(z)$ を改めて z とかくと

$$z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & & 0 \\ z_{12} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & z_{n-1\,n} \\ 0 & & z_{n-1\,n} & z_{nn} \end{bmatrix}$$

となり $\det z = const.$ だから $A(GL(n))$ の自由度は $2n-2$ となって互いに可換な Hamiltonian

の個数の2倍となる．このとき方程式系 $\frac{\partial Z}{\partial t_k}=\{\mathrm{tr}\, Z^k, Z\}$ は

$k=1$ のとき戸田分子(0.1)を含む．以上の話しの q 類似を $A(Gl_q(n))$

上で行いたい．ひいては戸田分子の q 類似を構成したい．そ

のためには Hamiltonian の公式 $\{\mathrm{tr}\, y^k, \mathrm{tr}\, y^\ell\}=0$ の q 類似をつくる

ことが必要となる．

§1　X の q 巾を次で定義する．${}_qX^1=X$，${}_qX^{k+1}=X\cdot(C *{}_qX^k)$

但し $C=(q^{\sigma(i,j)})_{n\times n}$ で $(A_{ij})_{n\times n} * (B_{ij})_{n\times n} = (A_{ij}B_{ij})_{n\times n}$ とする．

最終的には次の予想を示したい．

<u>予想</u>　　$[\mathrm{tr}_q X^k, \mathrm{tr}_q X^\ell]=0$　　$X\in Gl_q(n)$, for ${}^\forall k, {}^\forall \ell$.

以下では上記予想に関する幾つかの部分的結果を述べたい．

<u>Theorem 1</u>　$X\in Gl_q(n)$ とする．$\mathrm{tr}_q X^k$, $k\geq n$ は $\det_q X$, $\mathrm{tr}_q X$, …

…, $\mathrm{tr}_q X^{n-1}$ の多項式で書き下される．

証明．X は次の Cayley-Hamilton の q 類似をみたす [5]

$$ {}_qX^n - {}_qX^{n-1}\alpha^1 + \cdots + (-)^{n-1}{}_qX\alpha^{n-1} + (-)^n \det_q X\cdot 1 = 0 \qquad (1.1)$$

ここで $\alpha^k=\sum_{i_1<\cdots<i_k} \det_q X_{i_1\cdots i_k}$ とし $X_{i_1\cdots i_k}$ は X の $i_1\cdots i_k$ 首座小行列と

する．これより

$$ {}_qX^{n+m} = {}_qX^{n+m-1}\alpha^1 - \cdots - (-)^{n-1}{}_qX^{m+1}\alpha^{n-1} - (-)^n{}_qX^m \det_q X$$

従って次の Lemma を示せば十分である．

<u>Lemma 2</u>　α^ℓ　$1\leq\ell\leq n-1$ は $\mathrm{tr}_q X, \dots, \mathrm{tr}_q X^{n-1}$ の多項式であらわせる．

∵) n に関する帰納法で示す．$n=2$ のとき $\alpha^1=\mathrm{tr}_q X$ より Lemma

はなりたつ．$k\leq n$ に関し Lemma 2 は成立しているとする．$X_{i_1\cdots i_k}$

に関してもCayley-Hamiltonの公式は成立しているから

$$k(-)^k \det_q X_{i_1\cdots i_k} = -\mathrm{tr}_q X^k_{i_1\cdots i_k} + \mathrm{tr}_q X^{k-1}_{i_1\cdots i_k} d^1_{i_1\cdots i_k} - \cdots - (-)^{k-1} \mathrm{tr}_q X_{i_1\cdots i_k} d^{k-1}_{i_1\cdots i_k}$$

となる．$d^l_{i_1\cdots i_k} = \sum_{j_1<\cdots<j_l} \det_q (X_{i_1 \cdots i_k})_{j_1\cdots j_l}$．帰納法の仮定から

$$\det_q X_{i_1\cdots i_k} = F_k(\mathrm{tr}_q X_{i_1\cdots i_k}, \ldots, \mathrm{tr}_q X^k_{i_1\cdots i_k}). \tag{1.2}$$

$x_{i_m i_n}$ $i_1<\cdots<i_k$ が生成する代数と $x_{j_m j_n}$ $j_1<\cdots<j_k$ が生成する代数が同型であることより F_k は $i_1\cdots i_k$ のとり方によらない．

$1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$ に対し $\binom{n}{k}$ 個のパラメーター $a_{i_1\cdots i_k}$ を用意する．

$\tilde{x}_{ij} = (\prod_{J(i,j)} a_{i_1\cdots i_k}) x_{ij}$ とする．ここで $J(i,j) = \{1\leq \mu_1<\cdots<\mu_k\leq n \mid i,j \in \{\mu_1,\ldots,\mu_k\}\}$

とし $\prod_{J(i,j)}$ は $J(i,j)$ すべてにわたる積とする．$f = f(x_{11},\ldots,x_{nn})$ に対し

$\tilde{f}$ を $f(\tilde{x}_{11},\ldots,\tilde{x}_{nn})$ で定義する．$\mathrm{tr}_q X^{l_1}\cdot\cdots\cdot\mathrm{tr}_q X^{l_m}$ の任意の単項式

を $\pi_{l_1\cdots l_m} = f(q)\, x_{i_1 i_2}\cdots x_{i_{l_1} i_1}\cdots x_{p_1 p_2}\cdots x_{p_{l_m} p_1}$ とするここで $f(q)$ は q の

有理式．このとき

$$\tilde{\pi}_{l_1\cdots l_m} = \Big(\prod_{J(i_1,i_2)}\cdots\prod_{J(i_{l_1},i_1)}\cdots\prod_{J(p_1,p_2)}\cdots\prod_{J(p_{l_m},p_1)} a_{i_1\cdots i_k}\Big)\pi_{l_1\cdots l_m}$$

となる．

<u>Lemma 3</u> 上記 $\tilde{\pi}_{l_1\cdots l_m}$ で $a^k_{\mu_1\cdots\mu_k}$ が係数となるような $\mu_1<\cdots<\mu_k$ が存在する．

∵) $i_1,\ldots,i_l,\ldots,p_1,\ldots,p_{l_m}$ を単調非減少になるようにならべ，等しいものは同一視する．すると単調増加列 $\mu_1<\cdots<\mu_l$ $l\leq k$ を得る．このとき $\mu_l<\mu_{l+1}<\cdots<\mu_k\leq n$ なる $\mu_{l+1},\ldots,\mu_k$ に対し $x_{i_1 i_2},\ldots,x_{i_{l_1} i_1},\ldots,x_{p_1 p_2},\ldots,x_{p_{l_m} p_1}$ は X の $\mu_1\cdots\mu_k$ 首座小行列の成分になっているから //

多項式 $F_k(\mathrm{tr}_2 X, \dots, \mathrm{tr}_2 X^k)$ を考えその中の任意の単項式を π とおく.

<u>Lemma 4</u> $\tilde{\pi}$ の中で $a^k_{\mu_1 \dots \mu_k}$ が係数となっているような単調増加列 $1 \le \mu_1 < \dots < \mu_k \le n$ は唯一つ存在する.

∵) $\pi = f(\ell)\, x_{i_1 i_2} \cdots x_{i_{\ell_1} i_1} \cdots x_{p_1 p_2} \cdots x_{p_{\ell_m} p_1}$ $\ell_1 + \dots + \ell_m = k$ とする.
Lemma 3 より $\tilde{\pi}$ が係数として $a^k_{\mu_1 \dots \mu_k}$ を含む $\mu_1 < \dots < \mu_k$ は存在する. ところで $F_k(\mathrm{tr}_2 X, \dots, \mathrm{tr}_2 X^k)$ は任意の単調増加列 $\mu_1 < \dots < \mu_k$ に対し $F_k(\mathrm{tr}_2 X_{\mu_1 \dots \mu_k}, \dots \mathrm{tr}_2 X^k_{\mu_1 \dots \mu_k})$ にあらわれる単項式を含む. 明らかに $\tilde{\pi}$ が $a^k_{\mu_1 \dots \mu_k}$ を係数としてもつことと π が $F_2(\mathrm{tr}_2 X_{\mu_1 \dots \mu_k}, \dots, \mathrm{tr}_2 X^k_{\mu_1 \dots \mu_k})$ のなかにあらわれる単項式であることは同値である. (1.2) より $\widetilde{\det_2} X_{\mu_1 \dots \mu_k} = \tilde{F}(\mathrm{tr}_2 X_{\mu_1 \dots \mu_k}, \dots, \mathrm{tr}_2 X^k_{\mu_1 \dots \mu_k})$
この左辺は $a^k_{\mu_1 \dots \mu_k}$ 以外に k 乗の係数を含まない. //

Lemma 3, 4 により

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \widetilde{\det_2} X_{i_1 \dots i_k} - \tilde{F}_k(\mathrm{tr}_2 X, \dots, \mathrm{tr}_2 X^k) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a^k_{i_1 \dots i_k} \Big(\det_2 X_{i_1 \dots i_k}$$
$$- \tilde{F}_k(\mathrm{tr}_2 X_{i_1 \dots i_k}, \dots, \mathrm{tr}_2 X^k_{i_1 \dots i_k}) \big|_{a_{i_1 \dots i_k} = 1} \Big) = 0$$

$\binom{n}{k}$ 個のパラメーター $a_{i_1 \dots i_k}$ を $\to 1$ とすると

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \det_2 X_{i_1 \dots i_k} - F_k(\mathrm{tr}_2 X, \dots, \mathrm{tr}_2 X^k) = 0$$

これで Lemma 2 の証明が終り Th.1 は示された. Q.E.D.

次に記号の定義をしよう. $f = \sum_{i_1, \dots i_k'} a_{i_1 \dots i_k'} x_{i_1 i_1'} \cdots x_{i_k i_k'}$ とし整数の集合 $\{j_1, \dots, j_m\}$ に対し $f_{j_1 \dots j_m}$ を

$$f_{j_1\cdots j_m} = \sum_{\substack{\{i_1\cdots i_k\}\\=\{j_1\cdots j_m\}}} a_{i_1\cdots i_k} x_{i_1 i_1'}\cdots x_{i_k i_k'}$$ とする．ここでこの和の意味は $\{i_1,\cdots,i_k\}$ を整数の集合としてみたとき $\{j_1,\cdots,j_m\}$ と一致している $i_1,\cdots,i_k$ に関するすべての和ということ．例えば $f = x_{12}x_{21} + x_{13}x_{11}^2x_{22} + 2x_{11}^3x_{21} + x_{11}^5$ としたとき $f_{12} = x_{12}x_{21} + 2x_{11}^3x_{21}$．

<u>Proposition 5</u>　$f\in A(GL_q(n))$ とする．このとき $f=0$ と任意の $j_1<\cdots<j_m$ について $f_{j_1\cdots j_m}=0$ であることは同値．

証明．集合 $C=\{(i,j)\mid 1\le i,j\le n\}$ に次のように順序 $\prec$ を入れる．

$(i,j)\prec(k,l) \Leftrightarrow i<k$ or $i=k$ かつ $j<l$．$D=\{((i_1,i_1'),\cdots,(i_k,i_k'))\mid k\in N,\ (i_s,i_s')\in C\}$ とし D に $\prec$ を拡張する．すなわち $((i_1,i_1'),\cdots,(i_k,i_k')) \prec ((j_1,j_1'),\cdots,(j_m,j_m')) \Leftrightarrow k<m$ or $k=m$ かつ $(i_1,i_1')\prec(j_1,j_1')$ or $\cdots$ or $k=m$ かつ $(i_1,i_1')=(j_1,j_1'),\cdots,(i_{k-1},i_{k-1}')=(j_{k-1},j_{k-1}')$, $(i_k,i_k')\prec(j_k,j_k')$．

単項式 $v = x_{i_1i_1'}\cdots x_{i_ki_k'}$ に対し整数 $B(v)$ を $B(v)=\#\{(i_s,i_s'),(i_t,i_t')\mid i_s<(>)i_t,\ i_s'<(>)i_t'\}$ で定義する．x_{ij} と x_{kl} について $i<(>)k$ かつ $j<(>)l$ であるとき x_{ij} は x_{kl} について bad であるという．すなわち $B(v)$ は v の中の bad な関係の個数．ちなみに $i<(>)j$, $j>(>)k$ のとき x_{ij} は x_{kl} について good であるといい $i=k$ かつ $j<(>)l$ or $i<(>)k$ かつ $j=l$ のとき x_{ij} は x_{kl} について neutral であるという[3]．

$x_{i_1i_1'}\cdots x_{\mu\nu}x_{\rho\eta}\cdots x_{i_ki_k'}$ の $x_{\mu\nu}$ と $x_{\rho\eta}$ の順序をかえると

$x_{i_1i_1'}\cdots x_{\rho\eta}x_{\mu\nu}\cdots x_{i_ki_k'} + (q^{\theta(\nu,\eta)}-q^{-\theta(\mu,\rho)})x_{i_1i_1'}\cdots x_{\mu\eta}x_{\rho\nu}\cdots x_{i_ki_k'}$ となる．このとき次がなりたつ．

<u>Lemma 6</u>　$v = x_{i_1i_1'}\cdots x_{\mu\nu}x_{\rho\eta}\cdots x_{i_ki_k'}$ として $x_{\mu\nu}$ は $x_{\rho\eta}$ と bad であるとする．このとき $B(v) > B(x_{i_1i_1'}\cdots x_{\mu\eta}x_{\rho\nu}\cdots x_{i_ki_k'})$．

∵) 後で示す定理のためには $x_{i_si_s'}$ が $x_{\mu\nu}$ 及び $x_{\rho\eta}$ と good もしくは bad の場合のみ示せば十分．$\mu<\rho$, $\nu<\eta$ としても一般性は失なわない．もし $x_{i_si_s'}$ が $x_{\mu\nu}$ 及び $x_{\rho\eta}$ に関し good ならば $x_{i_si_s'}$ は $x_{\mu\eta}$, $x_{\rho\nu}$ に関し good (Fig.1)．次に $x_{i_si_s'}$ が $x_{\mu\nu}$ について bad で $x_{\rho\eta}$ について good であるとする．このとき次の2つの場合が考えられる．(i) $\mu<i_s<\rho$, $i_s'>\eta$ もしくは (ii) $\rho<i_s$, $\nu<i_s'<\eta$．
(i)のとき $x_{i_si_s'}$ は $x_{\rho\nu}$ と good．(ii)のときは $x_{i_si_s'}$ は $x_{\mu\eta}$ と good．
$x_{i_si_s'}$ が $x_{\mu\nu}$ とは good で $x_{\rho\eta}$ とは bad であったとすると次の2つの場合が考えられる．(iii) $i_s<\mu$, $\nu<i_s'<\eta$ もしくは (iv) $\mu<i_s<\rho$, $i_s'<\nu$．(iii)のとき $x_{i_si_s'}$ は $x_{\rho\nu}$ と good，(iv)のとき $x_{i_si_s'}$ は $x_{\mu\eta}$ と good (Fig.2)．　//

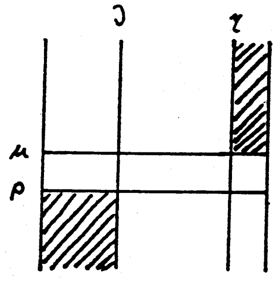

Fig.1

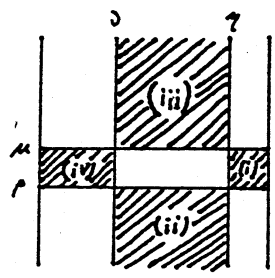

Fig.2

$M = \max B(x_{j_1j_1'}\cdots x_{j_\ell j_\ell'})$ とする 但し $x_{j_1j_1'}\cdots x_{j_\ell j_\ell'}$ は f の中の単項式とする．v を f の単項式とし $B(v)=L$ であるとき v は class L に属するという．$u = a_{j_1j_1'\cdots j_mj_m'}x_{j_1j_1'}\cdots x_{j_mj_m'}$ を Class M に属する f の単項式であるとする．$Y = \{((h_1,h_1'),\dots,(h_s,h_s'))\mid a_{h_1\cdots h_s'}x_{h_1h_1'}\cdots x_{h_sh_s'}$

$\in$ Class $M\}$ の中で $((j_1,j_1'),\cdots,(j_m,j_m'))$ は $<$ に関し極大であるとする. f の単項式の中で $x_{j_1j_1'},\cdots,x_{j_mj_m'}$ の任意のならべかえの積は Class M に属する. f の中に $x_{j_1j_1'},\cdots,x_{j_mj_m'}$ のならべかえの積があったらその積の順序を u と同じにする. このとき

$(a_{j_1\cdots j_m'}+\cdots)x_{j_1j_1'}\cdots x_{j_mj_m'}$ + others という形を得る. others とは順序を u にあわせるとき出てくる新しい単項式達である. Lemma 6 により others に属する単項式は Class $M-1$ 以下に属する. もし $(a_{j_1\cdots j_m'}+\cdots)=0$ ならば同じ操作を $Y-((j_1,j_1'),\cdots,(j_m,j_m'))$ の中の極大元に関して行う. この操作で Class M の単項式がなくなったら同じ操作を Class $M-1$ について行う. $f\neq 0$ ならばこの過程で $f=(a_{l_1\cdots l_p'}+\cdots)x_{l_1l_1'}\cdots x_{l_pl_p'}$ + others

, $a_{l_1\cdots l_p'}+\cdots\neq 0$ かつ others の単項式は Class $(B(x_{l_1l_1'}\cdots x_{l_pl_p'})-1)$ 以下に属している, となる. このとき $f_{l_1\cdots l_p'}\neq 0$. 逆は明らか //

<u>Theorem 7</u> $X\in GL_q(n)$ について $[\mathrm{tr}_q X^m, \mathrm{tr}_q X]=0$ $m>1$.

証明 n に関する帰納法で示す. 簡単な計算により $[\mathrm{tr}_q X^2,\mathrm{tr}_q X]=0$ $X\in GL_q(3)$. Th.2 より Th.7 は $n=3$ のとき正しい. $X\in GL_q(k)$ $k\le n$ に関し Th.7 は正しいとする. $X\in GL_q(n+1)$ とする. $l<n$ とし $k>l+1$ とするこのとき明らかに $[\mathrm{tr}_q X^l,\mathrm{tr}_q X]_{i_1\cdots i_k}=0$. 一方 $k\le l+1$ としたら $[\mathrm{tr}_q X^l,\mathrm{tr}_q X]_{i_1\cdots i_k}$

$= [\mathrm{tr}_q X^l_{i_1\cdots i_k}, \mathrm{tr}_q X_{i_1\cdots i_k}]_{i_1\cdots i_k}=0$. よって $l<n$ に関して

$[\mathrm{tr}_q X^l, \mathrm{tr}_q X] = 0$ $X\in GL_q(n+1)$ となる.

$k \le n$ とすると $[\mathrm{tr}_q X^n, \mathrm{tr}_q X]_{i_1\cdots i_k} = [\mathrm{tr}_q X^n_{i_1\cdots i_k}, \mathrm{tr}_q X_{i_1\cdots i_k}]_{i_1\cdots i_k} = 0$.
従って Prop 5. より $[\mathrm{tr}_q X^n, \mathrm{tr}_q X]_{12\cdots n+1} = 0$ を示せばよい．
$X \in GL_q(n)$ とし $[\mathrm{tr}_q X^{n-1}, \mathrm{tr}_q X]_{12\cdots n} = q^{n-2}A^n_{n-2} + \cdots + q^{-n+2}A^n_{-n+2}$ とする．
$X \in GL_q(3)$ に関し $[\mathrm{tr}_q X^2, \mathrm{tr}_q X] = qA^3_1 + q^{-1}A^3_{-1}$ としたとき
$A^3_1 = A^3_{-1} = 0$ (後のexampleを見よ). $A^n_{n-2k} = 0$ $k=1,\dots,n-1$ と仮定する．ここで量子力学の用語を借用しよう．単項式 $x_{i_1i_1'}\cdots x_{i_ki_k'}$ に対し単項式：$-(x_{i_1i_1'},\dots,x_{i_ki_k'}$ のならべかえの積$)$ を $x_{i_1i_1'}\cdots x_{i_ki_k'}$ の消滅対という．例えば $x_{12}x_{23}x_{31}$ の消滅対は $-x_{23}x_{31}x_{12}$, $-x_{31}x_{12}x_{23}$, $-x_{12}x_{31}x_{23}$, $-x_{23}x_{12}x_{31}$, $-x_{31}x_{23}x_{12}$, $-x_{12}x_{23}x_{31}$ である．

$$
\begin{aligned}
A^n_{n-2k} = {} & \sum_{\substack{\{i_2,\dots,i_{n-1}\} \\ =\{1,\dots,k-1,k+2,\dots,n\}}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(q^{\theta(i_{s+1},k+1)} - q^{-\theta(i_s,k+1)}\right) x_{ki_2}\cdots x_{i_sk+1}x_{k+1i_{s+1}}\cdots x_{i_{n-1}k} \\
& + \cdots + \sum_{\substack{\{i_2,\dots,i_{n-1}\} \\ =\{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n-1\}}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(q^{\theta(i_{s+1},n)} - q^{-\theta(i_s,n)}\right) x_{ki_2}\cdots x_{i_sn}x_{ni_{s+1}}\cdots x_{i_{n-1}k} + {} \\
& \sum_{\substack{\{i_2,\dots,i_{n-1}\} \\ =\{2,\dots,k-1,k+1,\dots,n\}}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(q^{\theta(i_{s+1},1)} - q^{-\theta(i_s,1)}\right) x_{k+1i_2}\cdots x_{i_s1}x_{1i_{s+1}}\cdots x_{i_{n-1}k+1} + \cdots + {} \\
& \sum_{\substack{\{i_2,\dots,i_{n-1}\} \\ =\{1,\dots,k-1,k+2,\dots,n\}}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(q^{\theta(i_{s+1},k)} - q^{-\theta(i_s,k)}\right) x_{k+1i_2}\cdots x_{i_sk}x_{ki_{s+1}}\cdots x_{i_{n-1}k+1}
\end{aligned}
$$

で $A^n_{n-2k} = 0$ だから

$$
A^n_{n-2k} = (q - q^{-1}) \sum_{\substack{\{i_2,\dots,i_n\} = \{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n\} \\ \{j_2,\dots,j_n\} = \{1,\dots,k,k+2,\dots,n\}}} \left(x_{ki_2}\cdots x_{i_nk} - x_{k+1j_2}\cdots x_{j_nk+1}\right)
$$

$$+(q-q^{-1})\sum_{\substack{\{i_2,\cdots,i_n\}=\{1,\cdots,k,k+2,\cdots,n\}\\ \{j_2,\cdots,j_n\}=\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\}}} (x_{k+1\,i_2}\cdots x_{i_n\,k+1}-x_{k\,j_2}\cdots x_{j_n\,k})$$

で $-x_{k+1\,j_2}\cdots x_{j_n\,k+1}$, $x_{k\,j_2}\cdots x_{j_n\,k}$ は夫々 $x_{k\,i_2}\cdots x_{i_n\,k}$ 及び $x_{k+1\,i_2}\cdots x_{i_n\,k+1}$ の消滅対. $x_{k\,i_2}\cdots x_{i_n\,k}$ と $x_{k+1\,i_2}\cdots x_{i_n\,k+1}$ をその消滅対の積の順序にあわせると $A^n_{n-2k}=(q-q^{-1})^2\sum\pm$(単項式) となる. $A^n_{n-2k}=0$ よりこれは

$$A^n_{n-2k}=(q-q^{-1})^2\sum(\text{単項式}+\text{その消滅対})$$

とあらわせる. 以下単項式の積の順序を消滅対のそれにあわせるという操作をつづけていくと常に

$$A^n_{n-2k}=(q-q^{-1})^{\ell}\sum(\text{単項式}+\text{その消滅対}) \qquad (1.3)$$

という形になる.

$$[\mathrm{tr}_q X^n, \mathrm{tr}_q X]_{12\cdots n+1}=q^{n+1}A^{n+1}_{n-1}+\cdots+q^{-n+1}A^{n+1}_{-n+1} \qquad X\in GL_q(n+1)$$

としたとき

$$A^{n+1}_{n+1-2k}=(q-q^{-1})\sum_{\substack{\{i_2,\cdots,i_{n+1}\}=\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n+1\}\\ \{j_2,\cdots,j_{n+1}\}=\{1,\cdots,k,k+1,\cdots,n+1\}}} (x_{k\,i_2}\cdots x_{i_{n+1}\,k}-x_{k+1\,j_2}\cdots x_{j_{n+1}\,k+1})$$

$$+(q-q^{-1})\sum_{\substack{\{i_2,\cdots,i_{n+1}\}=\{1,\cdots,k,k+2,\cdots,n+1\}\\ \{j_2,\cdots,j_{n+1}\}=\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n+1\}}} (x_{k+1\,i_2}\cdots x_{i_{n+1}\,k+1}-x_{k\,j_2}\cdots x_{j_{n+1}\,k})$$

$-x_{k+1\,j_2}\cdots x_{j_{n+1}\,k+1}$, $-x_{k\,j_2}\cdots x_{j_{n+1}\,k}$ は夫々 $x_{k\,i_2}\cdots x_{i_{n+1}\,k}$, $x_{k+1\,i_2}\cdots x_{i_{n+1}\,k+1}$ の消滅対, となることは見易い. $x_{k\,i_2}\cdots x_{i_{n+1}\,k}$

, $x_{k+1 i_2}\cdots x_{i_{n+1} k+1}$ を夫々の消滅対の順序にあわせると $A^{n+1}_{n+1-2k}=$ $(q-q^{-1})^2\sum\pm$(単項式)となる．さて $x_{ki_2}\cdots x_{\mu\nu}x_{\rho\eta}\cdots x_{i_{n+1}k}$ をその消滅対の積の順序にあわせるため $x_{\mu\nu}$ と $x_{\rho\eta}$ を入れかえるこのとき

$$x_{ki_2}\cdots x_{\rho\eta}x_{\mu\nu}\cdots x_{i_{n+1}k}+\underbrace{(q^{\theta(\nu,\eta)}-q^{-\theta(\mu,\rho)})x_{ki_2}\cdots x_{\mu\eta}x_{\rho\nu}\cdots x_{i_{n+1}k}}_{(イ)}$$

となる．下線部(イ)の係数はとなりあう4つの数字 μ,ν,ρ,η のみによってきまり n が $n+1$ にかわった特殊性はない．又(イ)の添字のならび方にも n が $n+1$ にかわった特殊性はない．従って

$$A^{n+1}_{n+1-2k}=(q-q^{-1})^2\sum(\text{単項式}+\text{その消滅対})$$

とかける．さらに上記単項式をその消滅対の順序にあわせる際生じる新しい項の係数及び添字のならび方の変化もいれかわる2つの生成元の4つの添字にしかよらず n が $n+1$ にかわった特殊性はない．従って A^{n+1}_{n+1-2k} は A^{n}_{n-2k} の性質(1.3)をひきつぐ．A^{n+1}_{n+1-2k} が $(q-q^{-1})^{\ell}\sum$(単項式+その消滅対)という形になったら単項式の順序を消滅対にあわせ $A^{n+1}_{n+1-2k}=(q-q^{-1})^{\ell+1}\sum$(単項式+その消滅対)という形にする．これをつづけていくと Lemma 6 により $^{\exists}\ell'$ が存在して

$$A^{n+1}_{n+1-2k}=(q-q^{-1})^{\ell'}\sum(\text{単項式}+\text{その消滅対}) \qquad (1.4)$$

,但し和の中の単項式の B の値は 0, となる．このとき単項式+その消滅対 $=0$ $\therefore A^{n+1}_{n+1-2k}=0$ $\therefore [tr_q X^n, tr_q X]_{12\cdots n+1}=0$. Q.E.D.

Example. For $X \in GL_q(3)$, $[tr_qX^2, tr_qX]_{123} = qA_1^3 + q^{-1}A_{-1}^3$,

$$A_1^3 = (q-q^{-1})\{(x_{13}x_{32}x_{21} - x_{21}x_{13}x_{32}) + (x_{12}x_{23}x_{31} - x_{23}x_{31}x_{12})$$
$$= (q-q^{-1})^2(x_{13}x_{22}x_{31} - x_{13}x_{31}x_{22}) = 0$$
$$A_{-1}^3 = (q-q^{-1})\{(x_{23}x_{31}x_{12} - x_{31}x_{12}x_{23}) + (x_{21}x_{13}x_{32} - x_{32}x_{21}x_{13})\}$$
$$= (q-q^{-1})^2(x_{22}x_{31}x_{13} - x_{31}x_{22}x_{13}) = 0.$$

For $X \in GL_q(4)$, $[tr_qX^3, tr_qX]_{1234} = q^2A_2^4 + A_0^4 + q^{-2}A_{-2}^4$,

$$A_2^4 = (q-q^{-1})\{(x_{14}x_{42}x_{23}x_{31} - x_{23}x_{31}x_{14}x_{42}) + (x_{12}x_{24}x_{43}x_{31} - x_{24}x_{43}x_{31}x_{12}) + (x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} - x_{23}x_{34}x_{41}x_{12}) +$$
$$(x_{14}x_{43}x_{32}x_{21} - x_{21}x_{14}x_{43}x_{32}) + (x_{13}x_{34}x_{42}x_{21} - x_{21}x_{13}x_{34}x_{42}) + (x_{13}x_{32}x_{24}x_{41} - x_{24}x_{41}x_{13}x_{32})\}$$
$$= (q-q^{-1})^2\{(x_{24}x_{13}x_{42}x_{31} - x_{13}x_{31}x_{24}x_{42}) + (x_{14}x_{22}x_{43}x_{31} - x_{14}x_{43}x_{31}x_{22}) + (x_{23}x_{14}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{41}x_{23}x_{32}) +$$
$$(x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} - x_{13}x_{34}x_{41}x_{22}) + (x_{14}x_{23}x_{41}x_{32} - x_{23}x_{41}x_{32}x_{14})\}$$
$$= (q-q^{-1})^3\{(x_{14}x_{23}x_{42}x_{31} - x_{23}x_{14}x_{31}x_{42}) + (x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{24}x_{13}x_{41}x_{32})\}$$
$$= (q-q^{-1})^4(x_{14}x_{23}x_{32}x_{41} - x_{23}x_{14}x_{41}x_{32}) = 0$$
$$A_0^4 = (q-q^{-1})\{(x_{24}x_{41}x_{13}x_{32} - x_{32}x_{24}x_{41}x_{13}) + (x_{21}x_{14}x_{43}x_{32} - x_{32}x_{21}x_{14}x_{43}) + (x_{21}x_{13}x_{34}x_{42} - x_{34}x_{42}x_{21}x_{13}) +$$
$$(x_{24}x_{43}x_{31}x_{12} - x_{31}x_{12}x_{24}x_{43}) + (x_{23}x_{34}x_{41}x_{12} - x_{34}x_{41}x_{12}x_{23}) + (x_{23}x_{31}x_{14}x_{42} - x_{31}x_{14}x_{42}x_{23}) +$$
$$(x_{24}x_{41}x_{13}x_{32} - x_{32}x_{24}x_{41}x_{13}) + (x_{23}x_{31}x_{14}x_{42} - x_{31}x_{14}x_{42}x_{23})\}$$
$$= (q-q^{-1})^2\{(x_{22}x_{31}x_{14}x_{43} - x_{31}x_{22}x_{14}x_{43}) + (x_{34}x_{22}x_{41}x_{13} - x_{34}x_{41}x_{22}x_{13}) + (x_{24}x_{31}x_{42}x_{13} - x_{24}x_{31}x_{42}x_{13}) +$$
$$(x_{21}x_{14}x_{33}x_{42} - x_{21}x_{14}x_{42}x_{33}) + (x_{24}x_{33}x_{41}x_{12} - x_{24}x_{41}x_{33}x_{12})\} = 0$$
$$A_{-2}^4 = (q-q^{-1})\{(x_{34}x_{42}x_{21}x_{13} - x_{42}x_{21}x_{13}x_{34}) + (x_{32}x_{24}x_{41}x_{13} - x_{41}x_{13}x_{32}x_{24}) + (x_{32}x_{21}x_{14}x_{43} - x_{43}x_{32}x_{21}x_{14}) +$$
$$(x_{34}x_{41}x_{12}x_{23} - x_{41}x_{12}x_{23}x_{34}) + (x_{31}x_{14}x_{42}x_{23} - x_{42}x_{23}x_{31}x_{14}) + (x_{31}x_{12}x_{24}x_{43} - x_{43}x_{31}x_{12}x_{24})\}$$
$$= (q-q^{-1})^2\{(x_{33}x_{42}x_{21}x_{14} - x_{42}x_{21}x_{33}x_{14}) + (x_{32}x_{23}x_{41}x_{14} - x_{32}x_{41}x_{23}x_{14}) + (x_{32}x_{41}x_{23}x_{14} - x_{41}x_{32}x_{14}x_{23}) +$$
$$(x_{33}x_{41}x_{12}x_{24} - x_{41}x_{12}x_{33}x_{24}) + (x_{31}x_{13}x_{42}x_{24} - x_{42}x_{31}x_{24}x_{13})\}$$
$$= (q-q^{-1})^3\{(x_{32}x_{41}x_{24}x_{13} - x_{41}x_{32}x_{13}x_{24}) + (x_{31}x_{42}x_{14}x_{23} - x_{42}x_{31}x_{23}x_{14})\}$$
$$= (q-q^{-1})^4(x_{32}x_{41}x_{14}x_{23} - x_{41}x_{32}x_{23}x_{14}) = 0.$$

Ref.

[1] Ikeda K., Lett. Math. Phys. 23 (1991) 121

[2] ———, Phys. Lett. A 183 (1993) 43

[3] Kupershmidt B., Quasiclassical limit of quantum matrix group in "M. Francaviglia and D. Holm (eds) Mechanics Analysis and Geometry ; 200 years after Lagrange," Elsevier, Amsterdam.

[4] ———, J. Phys. A 25 (1992) L915

[5] Zang J., The quantum Cayley-Hamilton theorem. Preprint.